

2018年天津河西区天津市实验中学高三二模理科数学试卷

一、选择题

(本大题共12小题, 每小题5分, 共60分)

1. 集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - x - 2 < 0\}$ 的真子集个数为 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

2. 若 a 为实数, 且 $\frac{2+ai}{1+i}=3+i$, 则 $a=(\quad)$.

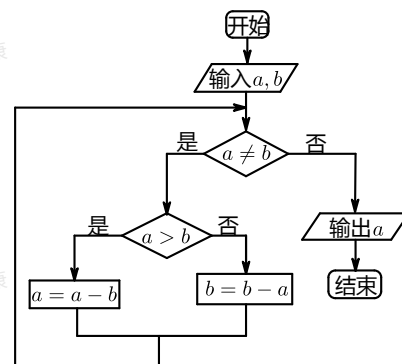
A. -4

B. -3

C. 3

D. 4

3. 下面程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”，执行该程序框图，若输入的 a, b 分别为14, 18，则输出的 a 为（ ）.



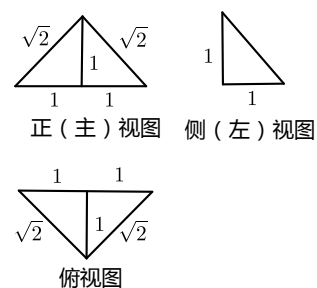
A. 0

B. 2

C. 4

D. 14

4. 一个四面体的三视图如图所示, 则该四面体的表面积是 ().



A. $1 + \sqrt{3}$

B. $1 + 2\sqrt{2}$

C. $2 + \sqrt{3}$

D. $2\sqrt{2}$

5. 已知命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, 2x^2 + (a-1)x + \frac{1}{2} \leq 0$ ” 是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(-\infty, -1)$

B. $(-1, 3)$

C. $(-3, +\infty)$

D. $(-3, 1)$

6. 已知 $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$.

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

7. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = ()$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 5

8. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ x - 2y + 1 \leq 0 \\ 2x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x + y$ 的最大值为 () .

A. -3 B. 4 C. 2 D. 5

9. 由曲线 $xy = 1$ 与直线 $y = x, y = 3$ 所围成的封闭图形面积为 () .

A. $2 - \ln 3$ B. $\ln 3$ C. 2 D. $4 - \ln 3$

10. 设 $a = \log_2 5, b = \log_4 15, c = 2^{0.5}$, 则 a, b, c 大小关系为 () .

A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

11. 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0, a_{2016} + a_{2017} > 0, a_{2016} \cdot a_{2017} < 0$, 则使前 n 项和 $S_n > 0$ 成立的最大正整数 n 是 () .

A. 2016 B. 2017 C. 4032 D. 4033

12. 若存在正数 x 使得 $2^x(x - a) < 1$ 成立, 则 a 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-2, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

二、填空题

(本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为2, 若 a_2, a_4, a_8 成等比数列, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项 $S_n =$ _____ .

14. 直线 $y = kx + 3$ 被圆 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 则直线的倾斜角为 _____ .

15. 函数 $y = \log_a(x + 4) - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 在直线 $mx + ny + 1 = 0$ 上, 其中 m, n 均大于0, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 _____ .

16. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边, $\triangle ABC$ 的面积 $S = 2$, 且满足 $a \cos B = b(1 + \cos A)$, 则 $(c + a - b)(c + b - a)$ 的取值范围是 _____ .

三、解答题

(本大题共6小题, 共70分)

17. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和图象的对称轴方程 .

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最值 .

18. 已知函数 $f(x) = |2x + 1| - |x - 1|$.

(1) 求不等式 $f(x) < 2$ 的解集 .

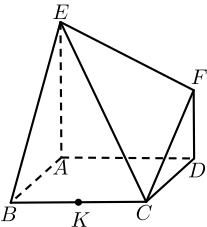
(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq a - \frac{a^2}{2}$ 有解, 求 a 的取值范围 .

19. 证明: $\sqrt{2}$ 不是有理数 .

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{n+1} = 4a_n + 2, a_1 = 1$.

- (1) $b_n = a_{n+1} - 2a_n$, 求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列 .
- (2) 设 $c_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求证数列 $\{c_n\}$ 是等差数列 .
- (3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n .

21. 如图 , 已知多面体 $EABCDF$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形 , $EA \perp$ 底面 $ABCD$, $FD \parallel EA$, 且 $FD = \frac{1}{2}EA = 1$.



- (1) 记线段 BC 的中点为 K , 在平面 $ABCD$ 内过点 K 作一条直线与平面 ECF 平行 , 要求保留作图痕迹 , 并写出该直线与 CF 所成角的余弦值 . 但不要求证明和解答过程 .
- (2) 求直线 EB 与平面 ECF 所成角的正弦值 .

22. 设函数 $f(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2$

- (1) 当 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) + \frac{a}{2}x \leq 0$ 恒成立 , 求实数 a 的取值范围 .
- (2) 设 $g(x) = f(x) - x$ 在 $[1, e^2]$ 上有两个极值点 x_1, x_2 .
 - ① 求实数 a 的取值范围 ;
 - ② 求证 : $\frac{1}{\ln x_1} + \frac{1}{\ln x_2} > 2ae$.